ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

**Памятка по ключевым вопросам теории
для подготовки к зачету.**

1. Дать определение следующего понятия: «Кривая $y=\varphi(x), x \in [x_1, x_2]$ доставляет сильный локальный минимум интегральному функционалу $J[y]=\int_{x_1}^{x_2} f\big(x, y(x), y'(x)\big)dx$, $y(x_1)=y_1, y(x_2)=y_2$.»

Ответ. Назовем расстоянием нулевого порядка между непрерывными функциями $y=\varphi(x)$ и $y=\psi(x)$, заданными на промежутке $[x_1, x_2]$, число $\rho(\varphi,\psi)=\max_{x\in[x_1,x_2]}|\varphi(x)-\psi(x)|$.

Кривая $y=\varphi(x), x \in [x_1, x_2]$ доставляет сильный локальный минимум интегральному функционалу $J[y]=\int_{x_1}^{x_2} f\big(x, y(x), y'(x)\big)dx$, $y(x_1)=y_1$, $y(x_2)=y_2$, если существует положительное число ε такое, что для любой функции $y=\psi(x), x\in[x_1,x_2], \psi(x_1)=y_1, \psi(x_2)=y_2$, удовлетворяющей условию $\rho(\varphi,\psi)<\varepsilon$, выполнено неравенство $J[\varphi]\le J[\psi]$. Другими словами, значение функционала на функции φ является меньшим по сравнению со значениями на всех достаточно близких по ординатам к φ функциям.

2. Дать определение следующего понятия. Кривая $y=\varphi(x), x \in [x_1, x_2]$ доставляет слабый локальный минимум интегральному функционалу $J[y]=\int_{x_1}^{x_2} f\big(x, y(x), y'(x)\big)dx$, $y(x_1)=y_1, y(x_2)=y_2$.

Ответ. Назовем расстоянием первого порядка между непрерывно дифференцируемыми функциями $y=\varphi(x)$ и $y=\psi(x)$, заданными на промежутке $[x_1, x_2]$, число

$$\rho_1(\varphi,\psi)= \\ =\max_{x\in[x_1,x_2]}|\varphi(x)-\psi(x)|+\max_{x\in[x_1,x_2]}|\varphi'(x)-\psi'(x)|.$$

Кривая $y=\varphi(x), x \in [x_1, x_2]$ доставляет слабый локальный минимум интегральному функционалу $J[y]=\int_{x_1}^{x_2} f\big(x, y(x), y'(x)\big)dx$, $y(x_1)=y_1$, $y(x_2)=y_2$, если существует положительное число ε такое, что для любой функции $y=\psi(x), x\in[x_1,x_2], \psi(x_1)=y_1, \psi(x_2)=y_2$, удовлетворяющей условию $\rho_1(\varphi,\psi)<\varepsilon$, выполнено неравенство $J[\varphi]\le J[\psi]$. Другими словами, значение функционала на функции φ является меньшим по сравнению со значениями на всех достаточно близких по ординатам и по тангенсу угла наклона касательной к φ функциям.

3. Объяснить, почему кривая, доставляющая сильный экстремум функционалу, доставляет ему и слабый экстремум.

Ответ. Кривая, доставляющая сильный экстремум функционалу, доставляет ему и слабый экстремум по той же причине, по которой человек, имеющий рост, меньше роста любого жителя в Санкт-Петербурге, имеет рост меньший роста любого жителя Васильевского острова. Кривая, близкая к кривой $y=\varphi(x), x \in [x_1, x_2]$ по ординатам и по тангенсу угла наклона касательной, близка и просто по ординатам.

4. Для функции n переменных $y=g(x)$ $x=(x_1,\ldots,x_n)^T$ дать определение производной во внутренней точке x_0 области задания по направлению вектора $p=(p_1,\ldots,p_n)^T, \|p\|=1$.

Ответ. Рассмотрим функцию параметра α, определенную соотношением $\gamma(\alpha)=g(x_0+\alpha p)$. Эта функция определена при достаточно малых α в некоторой окрестности нуля, так как точка x_0 внутренняя и при малых α точка $x_0+\alpha p$ лежит в области определения функции $y=g(x)$. Производной функции $y=g(x)$ в точке x_0 по направлению вектора $p=(p_1,\ldots,p_n)^T, \|p\|=1$ называется значение производной функции $\gamma(\alpha)=g(x_0+\alpha p)$ по параметру α при $\alpha=0$:

$$\gamma'(0)=\frac{d}{d\alpha}g(x_0+\alpha p)\Big|_{\textit{подставить}\ \alpha=0}.$$

$$\gamma'(0)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g(x_0)}{\partial x_i}p_i=(\mathrm{grad}\,g(x_0),p).$$

Таким образом, производная по направлению $p=(p_1,\ldots,p_n)^T, \|p\|=1$ в точке x_0 функции g есть скалярное произведение градиента функции g в этой точке и вектора $p=(p_1,\ldots,p_n)^T$, задающего направление.

5. Для интегрального функционала

$$J[y]=\int_{x_1}^{x_2} f\big(x, y(x), y'(x)\big)dx,$$
$$y(x_1)=y_1, y(x_2)=y_2$$

дать определение первой вариации на кривой $y=\varphi(x), x\in[x_1,x_2],\ \varphi(x_1)=y_1, \varphi(x_2)=y_2$

в направлении функции $y = p(x)$, такой что $p(x_1) = 0$, $p(x_2) = 0$.

Ответ. Рассмотрим функцию параметра α, определенную соотношением $\gamma(\alpha) = J[\varphi + \alpha p]$. Эта функция определена при достаточно малых α в некоторой окрестности нуля, так как при малых α функция $\varphi + \alpha p$ принадлежит области определения функционала J. Вариацией функционала J по направлению функции p называется значение производной функции $\gamma(\alpha) = J[\varphi + \alpha p]$ по параметру α при $\alpha = 0$:

$\gamma'(0) = \frac{d}{d\alpha} J[\varphi + \alpha p]$ при $\alpha = 0$,

$\gamma'(0) = \frac{d}{d\alpha} \int_{x_1}^{x_2} f(x, \varphi + \alpha p, \varphi' + \alpha p') dx$ при $\alpha = 0$.

Дифференцируя под знаком интеграла, получим

$$\gamma'(0) = \int_{x_1}^{x_2} (f_y(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \cdot p(x) + $$
$$+ f_{y'}(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \cdot p'(x)) dx.$$

Введем специальное обозначение для вариации функционала и для функции $p(x)$:

$\gamma'(0) = \delta J$, $p(x) = \delta y(x)$, $p'(x) = \delta y'(x)$.

В этих обозначениях вариация функционала задается соотношением

$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} (f_y \delta y + f_{y'} \delta y') dx.$

Здесь запись f_y означает производную функции f по её второму аргументу (из трех), а $f_{y'}$ – производную функции f по третьему аргументу.

Замечание. Лагранж вводил несколько иные обозначения для вариаций

$\alpha\gamma'(0) = \delta J$, $\alpha p(x) = \delta y(x)$, $\alpha p'(x) = \delta y'(x)$.

Эти обозначения многие авторы продолжают применять.

6. Сформулировать необходимое условие экстремума для гладкой функции n переменных $y = g(x), x = (x_1, \dots, x_n)^T$ во внутренней точке x_0 области ее определения.

Ответ. Рассмотрим функцию параметра α, определенную соотношением $\gamma(\alpha) = g(x_0 + \alpha p)$. Эта функция определена при достаточно малых α в некоторой окрестности нуля, так как точка x_0 внутренняя и при малых α точка $x_0 + \alpha p$ лежит в области определения функции $y = g(x)$. Функция $y = g(x)$ в точке x_0 имеет экстремум, поэтому функция $\gamma(\alpha) = g(x_0 + \alpha p)$ параметра α имеет экстремум при $\alpha = 0$, поскольку $\gamma(0) = g(x_0)$. Необходимым условием экстремума функции одной переменной является равенство нулю ее производной в точке экстремума. Производной функции $y = g(x)$ в точке x_0 по направлению вектора $p = (p_1, \dots, p_n)^T, \|p\| = 1$ называется значение производной функции $\gamma(\alpha) = g(x_0 + \alpha p)$ по параметру α при $\alpha = 0$:

$\gamma'(0) = \frac{d}{d\alpha} g(x_0 + \alpha p)$ при $\alpha = 0$.

Равенство нулю производной $\gamma'(0)$

$$\gamma'(0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g(x_0)}{\partial x_i} p_i = (\mathrm{grad}\, g(x_0), p) = 0$$

для любого направления p возможно только при $\mathrm{grad}\, g(x_0) = 0$. Равенство нулю градиента функции g в точке x_0 является необходимым условием экстремума в этой точке.

7. Сформулировать необходимое условие экстремума для интегрального функционала $J[y] = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x), y'(x)) dx$, $y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2$ на кривой $y = \varphi(x), x \in [x_1, x_2], \varphi(x_1) = y_1, \varphi(x_2) = y_2$.

Ответ. Рассмотрим функцию параметра α, определенную соотношением $\gamma(\alpha) = J[\varphi + \alpha p]$. Эта функция определена при достаточно малых α в некоторой окрестности нуля, так как при малых α функция $\varphi + \alpha p$ принадлежит области определения функционала J. При $\alpha = 0$ имеем $\gamma(0) = J[\varphi]$, поэтому если функционал на функции φ имеет экстремум, то функция параметра $\gamma(\alpha)$ имеет экстремум при $\alpha = 0$. Необходимым условием экстремума функции одной переменной является равенство нулю ее производной в точке экстремума. Вариацией функционала J по направлению функции p называется значение производной функции $\gamma(\alpha) = J[\varphi + \alpha p]$ по параметру α при $\alpha = 0$:

$\gamma'(0) = \frac{d}{d\alpha} J[\varphi + \alpha p]$ при $\alpha = 0$.

Следовательно, если функция φ доставляет функционалу J экстремум, то $\gamma'(0) = \delta J = 0$.

8. Выписать формулу интегрирования по частям, которая позволит «перебросить» дифференцирование на первый сомножитель под знаком интеграла $\int_{x_1}^{x_2} u(x)v'(x)dx$.

Ответ.

$$\int_{x_1}^{x_2} u(x)v'(x)dx =$$

$$= u(x_2)v(x_2) - u(x_1)v(x_1) - \int_{x_1}^{x_2} u'(x)v(x)dx.$$

9. Первая вариация интегрального функционала $J[y] = \int_{x_1}^{x_2} f\big(x, y(x), y'(x)\big)dx$, $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$ имеет вид $\delta J = \int_{x_1}^{x_2}(f_y \delta y + f_{y'}\delta y')dx$. Применить формулу интегрирования по частям, так чтобы под знаком интеграла отсутствовала вариация производной $\delta y'$.

Ответ. Формулу интегрирования по частям применяем только ко второму слагаемому, стоящему под знаком интеграла, оставляя первое без изменений. Внеинтегральный член формулы интегрирования по частям равен нулю для данного функционала по причине равенства нулю вариации функции на концах $\delta(x_1) = \delta(x_2) = 0$. Формула для вариации функционала принимает вид

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left(f_y - \frac{d}{dx} f_{y'}\right) \delta y dx.$$

10. В каком случае уравнение Эйлера $f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0$ для простейшей вариационной задачи имеет интеграл энергии $f - y' f_{y'} = \text{const}$?

Ответ. В случае, когда интегрант функционала $f(x, y, y')$ не зависит явным образом от независимой переменной x, т. е. $\frac{\partial f}{\partial x} \equiv 0$, вдоль любого решения уравнения Эйлера $f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0$ сохраняет свое значение выражение $f - y' f_{y'}$, т. е. $f - y' f_{y'} = \text{const}$. Это и есть интеграл энергии.

11. В каком случае уравнение Эйлера $f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0$ для простейшей вариационной задачи имеет интеграл импульса?

Ответ. В случае, когда интегрант функционала $f(x, y, y')$ не зависит явным образом от второго аргумента y, т. е. $\frac{\partial f}{\partial y} \equiv 0$, вдоль любого решения уравнения Эйлера $f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0$ сохраняет свое значение $f_{y'}$. Таким образом, вдоль любого решения $f_{y'} = \text{const}$. Это и есть интеграл импульса.

12. Составить уравнение Эйлера-Лагранжа для математического маятника, приняв за обобщенную координату q этой консервативной голономной системы угол отклонения от вертикали, а за обобщенную скорость $\dot{q}$ – производную от этого угла.

Ответ. Рассмотрим произвольную голономную систему с независимыми координатами $q = (q_1, \dots, q_n)^T$. (Система называется голономной, если на точки этой системы не наложены дифференциальные неинтегрируемые связи.) Пусть обобщенные силы являются потенциальными, т. е. существует потенциальная энергия $\Pi = \Pi(t, q_1, \dots, q_n)$. Функцией Лагранжа или кинетическим потенциалом системы является разность ее кинетической и потенциальной энергий $L(t, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) = T - \Pi$. Интеграл

$$J[q] = \int_{t_1}^{t_2} L\big(t, q(t), \dot{q}(t)\big)dt$$

называется действием по Гамильтону за промежуток времени (t_1, t_2). Для вычисления действия необходимо задать вектор-функцию $q = q(t)$ на промежутке времени $[t_1, t_2]$, т. е. действие есть функционал, определенный на движениях системы. В расширенном координатном пространстве с координатами $q_1, \dots, q_n, t$ это движение изображается некоторой кривой. Фиксируем начальный t_1 и конечный t_2 моменты времени, а так же начальное q^1 и конечное q^2 положения системы. При этом в расширенном координатном пространстве фиксируются две точки. Будем рассматривать все кривые (их принято называть путями), соединяющие эти точки, т. е. рассматривать все кинематически возможные (допускаемые связями) движения, $q = q(t)$, $q(t_1) = q^1$, $q(t_2) = q^2$. Предположим, что среди рассматриваемых путей имеется путь, по которому реально движется система при заданной функции Лагранжа (т. е. в заданном силовом поле). Этот путь называют прямым путем, а все остальные пути называют окольными.

Согласно принципу Гамильтона действие

$$J[q] = \int_{t_1}^{t_2} L\big(t, q(t), \dot{q}(t)\big)dt$$

$q(t_1) = q^1$, $q(t_2) = q^2$ для прямого пути имеет экстремальное (точнее стационарное) значение по сравнению с окольными путями. Таким образом, для прямого пути вектор- функция $q = q(t)$ является решением уравнений Эйлера – Лагранжа

$$L_q - \frac{d}{dt} L_{\dot q} = 0,$$

которые мы запишем в координатной форме следующим образом

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, n).$$

Перейдем к составлению функции Лагранжа для математического маятника. Принимаем обозначения: l -- длина подвеса материальной точки, m -- масса этой точки, g – ускорение свободного падения в поле тяжести, q – угол отклонения от вертикали (возрастает при движении против часовой стрелки). Введем систему прямоугольных координат в вертикальной плоскости движения материальной точки, расположив начало в точке подвеса, направив ось абсцисс горизонтально вправо и направив ось ординат вертикально вниз. Тогда декартовы координаты материальной точки, движущейся по окружности радиуса l с центром в начале координат, следующим образом выразятся через угол q:

$$x = l\sin q,$$
$$y = l\cos q.$$

Найдем квадрат скорости движения этой материальной точки:

$$v^2 = \dot x^2 + \dot y^2 = l^2 \dot q^2.$$

Таким образом, выражение кинетической энергии маятника через обобщенную скорость будет следующим

$$T = \frac{1}{2} m l^2 \dot q^2.$$

Примем нулевой уровень потенциальной энергии маятника соответствующим самому нижнему положению маятника, тогда

$$\Pi = mgl(1 - \cos q).$$

Выпишем функцию Лагранжа маятника:

$$L(q, \dot q) = \frac{1}{2} m l^2 \dot q^2 - mgl(1 - \cos q).$$

Уравнение Эйлера – Лагранжа в этом случае имеет вид:

$$L_q - \frac{d}{dt} L_{\dot q} = -mgl\sin q - ml^2 \ddot q = 0.$$

Разделив обе части этого дифференциального уравнения на коэффициент при второй производной обобщенной координаты, получим

$$\ddot q + \frac{g}{l}\sin q = 0$$

Это уравнение колебаний математического маятника.

13. Пусть функция $f(x, y, y')$ имеет непрерывную частную производную $f_{y'y'}(x, y, y')$ и пусть экстремаль C включена в поле экстремалей. Если на экстремали C имеем $f_{y'y'} > 0$, то на кривой C достигается слабый минимум; если $f_{y'y'} < 0$ на экстремали C, то на ней достигается слабый максимум функционала $J[y] = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x), y'(x))dx$, $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$. Эти условия называются *усиленными условиями Лежандра*. Что нужно изменить в формулировке условий Лежандра, чтобы получить достаточные условия сильного экстремума?

<u>Ответ</u>. В том случае, когда $f_{y'y'}(x, y, y') \ge 0$ в точках (x, y), близких к экстремали C, при произвольных значениях y', то имеем сильный минимум, а в случае, когда для указанных значений аргументов $f_{y'y'}(x, y, y') \le 0$, имеем сильный максимум.

14. Изопериметрическая задача, задача Лагранжа с голономными связями и задача Лагранжа с дифференциальными связями являются задачами на условный экстремум. К какому типу задач относится вариационная задача поиска кривой заданной длины, охватывающей наибольшую площадь?

<u>Ответ</u>. Это изопериметрическая задача.

15. Решить вариационную задачу поиска плоской кривой, соединяющей две точки на плоскости и имеющей наименьшую длину.

<u>Ответ</u>. Пусть (x_1, y_1) и (x_2, y_2) координаты точек, которые нужно соединить кривой. Будем считать, что точки не лежат на одной вертикали, т. е. $x_1 \ne x_2$. Для нахождения кривой наименьшей длины нужно минимизировать следующий функционал

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2(x)}dx, \; y(x_1) = y_1, \; y(x_2) = y_2.$$

Уравнение Эйлера для этого функционала имеет интеграл импульса

$$f_{y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \text{const},$$

что влечет $y' = C_1$, откуда $y = C_1 x + C_2$. Из граничных условий находим

$$C_1 x_1 + C_2 = y_1,$$
$$C_1 x_2 + C_2 = y_2.$$

Решение этой системы позволяет найти единственную экстремаль, соединяющую заданные точки:

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1.$$

Эта экстремаль может быть включена в центральное поле экстремалей $y = C(x - x_1) + y_1$. Таким образом условие Якоби выполнено. Проверим выполнение условия Лежандра, которое требует в качестве достаточного условия сильного минимума справедливости неравенства $f_{y'y'}(x, y, y') \geq 0$ в точках (x, y), близких к нашей экстремали $y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$ при произвольных значениях y'. В нашем случае

$$f_{y'y'} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + y'^2\right)^3}} > 0.$$

Таким образом, на отрезке прямой достигается сильный минимум.